UPS - Toulouse | **Contrôle partiel** | 8 mars 2012
L2 Physique | Mécanique des Solides | durée : 1h00

Aucun document n'est autorisé

A. Questions de cours (5 points)

1) Démontrer la relation permettant de calculer le moment d'inertie d'une boule homogène par rapport à un axe quelconque passant par son centre, connaissant son moment d'inertie par rapport à son centre. *Cette relation pourra être utile dans la suite.*

2) Énoncer (sans démonstration) le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique d'un solide

B. Problème (15 points)

Étude cinématique d'un mouvement

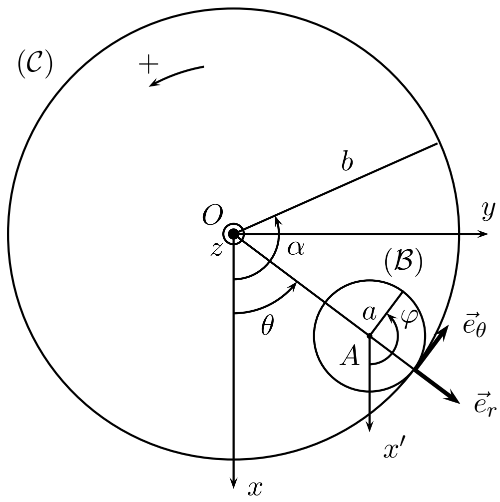
On considère une bille $(\mathcal{B})$ homogène de masse m, de centre A et de rayon a. Cette bille peut rouler sans glisser à l'intérieur d'un cylindre $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon b qui peut lui-même tourner autour de son axe de révolution (Oz).

On suppose que le mouvement de la bille est tel que A reste dans le plan (Oxy) de la figure ci-contre et que la bille reste en contact permanent avec le cylindre.

À un instant t, on définit dans le référentiel du laboratoire la position du système par les paramètres angulaires α, θ et φ introduits de la manière suivante :

- α : angle d'un rayon matériel de $(\mathcal{C})$ avec l'axe vertical descendant (Ox),
- θ : angle que fait le rayon (OA) avec (Ox)
- φ : angle d'un rayon matériel de $(\mathcal{B})$ avec (Ax').

On introduit par ailleurs la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ comme indiquée sur la figure. On désigne par P le point de $(\mathcal{C})$ en contact avec la bille $(\mathcal{B})$ à l'instant considéré et par Q le point de $(\mathcal{B})$ en contact avec le cylindre $(\mathcal{C})$ à ce même instant.



1) Exprimer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la vitesse par rapport au référentiel du laboratoire
- du point P,
- du point A,
- du point Q.

2) Rappeler ce qu'on appelle la vitesse de glissement. En déduire la relation entre a, b, $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\varphi}$ qui assure le roulement sans glissement de la bille $(\mathcal{B})$ sur $(\mathcal{C})$. Vérifier que si le cylindre $(\mathcal{C})$ ne tourne pas on a $a\dot{\varphi} = (a-b)\dot{\theta}$.

3) Établir l'expression du moment d'inertie I de la bille $(\mathcal{B})$ autour de l'axe (Az) en fonction de sa masse m, et de son rayon a.

4) Calculer, en précisant le(s) théorème(s) utilisé(s),

a) le moment cinétique de la bille $(\mathcal{B})$ dans son référentiel du centre de masse (A, x', y', z'),

b) le moment cinétique de la même bille par rapport à O dans le référentiel du laboratoire,

c) l'énergie cinétique de la bille dans le référentiel du laboratoire.

en fonction de m, a, b, $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$.